УДК 517.95

С.Ж. Кабакбаев[1]

[1]Казахская академия транспорта и коммуникаций им М.Тынышпаева, г.Алматы, Казахстан, [a]zsatbay@mail.ru

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МОНОТОННОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

Аннотация. Рассматриваются параболические уравнения второго порядка $\partial_t u = -Au$ с монотонной главной частью. Доказана теорема о существования и единственности решений таких уравнений.

Аңдатпа. Бас бөлігі монотонды болатын екінші ретті параболалық теңдеулер $\partial_t u = -Au$ қарастырылады. Сондай теңдеулердің шешімі бар және жалғыз екендігі дәлелденген.

Abstract. Consider parabolic equations of the second order $\partial_t u = -Au$ with a monotone main part. Prove existens and singular solutions this equations.

Ключевые слова: пространство, оператор, норма, теорема, скалярное произведение, ограниченность.

Түйінді сөздер: кеңістік, оператор, норма, теорема, скалярлық көбейтінді, шектелген.

Keywords: space, operator, norm, proposition, theorem, the scalar product, boundedness.

В статье изучаются параболические уравнения с монотонной главной частью. Разрешимость основных краевых задач для таких уравнений была доказана М.И. Вишиком. Изучению таких уравнений посвящены работы Браудера, Лионса, Дубинского, Брезиса, Скрынника и других авторов.

Для простаты ограничимся случаем уравнений второго порядка, хотя рассмотрения переносится на параболические уравнения порядка 2m.

Рассмотрим в области $\Omega \subset R^n$ уравнение

$$\partial_t u = -Au \, , \; Au = A_1 u + A_0 u + A_2 u + g \, , \; u\big|_{\partial\Omega} = 0 \, , \tag{1}$$

где

$$A_1 u = -\sum_{i=1}^{n} \partial_i a_i \left(\nabla u\right), \tag{2}$$

$$A_0 u = f(u)\, , \tag{3}$$

$$A_2 u = -\sum_{i.,j=1}^{n} \partial_i \left(b_{ij}(x)\partial_j u\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u + b(x)u - \lambda u \, , \; \lambda \ge 0 \, . \tag{4}$$

здесь $a_i(\xi)$, $\xi \in R^n$ - функции класса $C^2(R^n)$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i.,j=1}^{n} a_{i.j}(\xi)\xi_i \xi_j \ge \mu' |\xi|^2 \, , \;\; \mu' \ge 0 \, , \; a_{ij}(\xi) = \partial a_i \big/ \partial \xi_j \, , \tag{5}$$

$$\left|a_{ij}(\xi)\right| \le C\left(1 + |\xi|^{p_1 - 2}\right).$$

Кроме того предполагается, что

$$\mu_1\left(1 + (\xi)^{з_1}\right) \ge \sum_{i=1}^{n} a_i(\xi)\xi_i \ge \mu_0 |\xi|^{p_1} \, , \; \mu_0 \ge 0 \, , \; p_1 \ge 2^1 . \tag{6}$$

Пусть функция $f(u) \in C'(R)$ и удовлетворяет условиям

$$f'(u) \ge 0 \, , \tag{7}$$

$$\mu_1|u|^{p_0}+C|u|\geq f(u)u\geq \mu_0|u|^{p_0},\text{ где } p_0>2. \quad (8)$$

Заметим, что, поскольку в выражении (4) для оператора A_2 имеется сколь угодно большое слагаемое - λu, $f(u)$ иногда можно заменить на $f(u)+\lambda_1 u$ так, чтобы условия (7) и (8) выполнялись. Тогда, очевидно, $A_0 u = f(u)+\lambda_1 u$, а в операторе A_2 член - λu следует заменить на - $(\lambda+\lambda_1)u$.

Предполагается, что функция $g(x)$ в (1) принадлежит $L_p(\Omega)$, где $q>1$, а также предполагается

$$\text{или } 1/q+1/p_0\leq 1,\text{ или } 1/q+1/p_1-1/n\leq 1. \quad (9)$$

Пусть коэффициенты линейного оператора A_2 и удовлетворяют следующим условиям: $b(x)$, $b_{ij}(x)\in L_\infty(\Omega)$, $b_i(x)\in C^1(\overline{\Omega})$,

$$b_{ij}=b_{ji},\ \sum_{i.,j=1}^{n} b_{i.j}(x)\xi_i\xi_j\geq 0,\ \forall\xi\in R^n. \quad (10)$$

Таким образом , члены второго порядка оператора A_2 образуют неотрицательный оператор, причем допускается любые его вырождения.

Введем следующие обозначения:

$$V_0=L_{p_0}(\Omega),\ V_1=W^1{}_{p_{1,0}}(\Omega),\ H=L_2(\Omega). \quad (10')$$

Через $\|u\|_{V_1}$ будем обозначать $\|\nabla u\|_{0,p_1}$ (Отметим, что $\|\cdot\|_{V_1}$ эквивалентна норме $W^1_{p_1}$, в силу нулевых граничных условий (1)). Обозначим через V_0^* и V_1^* пространств, сопряженные к V_0 и V_1 соответственно. Эти пространства при помощи скалярного произведения в H отождествляются с подпространствами пространства обобщенных функций $(C_0^\infty)^*$. Как известно, $L_{p_0}(\Omega)^*=L_{p_0'}(\Omega)$, $1/p_0'+1/p_0=1$. Так как в силу теоремы вложения Соболева $W^1{}_{p_{1,0}}(\Omega)=V_1\subset L_p(\Omega)$, где $1/p=1/p_1-1/n$, то $V_1^*\supset L_q(\Omega)$, где q удовлетворяет (9).

Доказана свойства операторов A_1, A_0 и A_2, которые используются в дальнейшем.

Предложение. 1) Если $u\in V_1$, то $A_1 u\in V_1^*$, причем оператор A_1 ограничен из V_1 в V_1^* и

$$(A_1 u,u)\geq \mu_0\|u\|_{V_1}^{p_1}. \quad (11)$$

2) Если $u_0\in V_0$, то $A_0 u\in V_0^*$, причем A_0 ограничен из V_0 в V_0^* и

$$(A_0 u,u)\geq \mu_0\|u\|_{V_0}^{p_0}. \quad (12)$$

3) Если $u,v\in V_1$, то

$$(A_2 u-A_2 v,u-v)\geq 0. \quad (13)$$

4) Если $u,v\in V_0$, то

$$(A_0 u-A_0 v,u-v)\geq 0. \quad (14)$$

Доказательство. 1) Пусть $u\in V_1$, $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$. Согласно определению обобщенной производной,

$$-(\partial_i a_i(\nabla u),\varphi)=(a_i(\nabla u),\partial_i\varphi). \quad (15)$$

Как известно, норма элемента f в пространстве V^*, сопряженном к пространству V , определяется по формуле

$$\|f\|_{V^*}=\sup\left\{ |\langle f,\varphi\rangle| \big/ \|\varphi\|_V ,\varphi\in Q,\varphi\neq 0\right\}, \qquad (15')$$

где Q- множество, всюду плотное в V. Для оценки $\|\partial_i a_i(\nabla u)\|_{V_1^*}$ возьмем $Q=C_0^\infty(\Omega)$, $V=V_1$ и оценим сверху правую часть (15):

$$|\langle\partial_i a_i(\nabla u),\varphi\rangle|\le\int_\Omega |a_i(\nabla u)\|\partial_i\varphi|dx\le\|a_i(\nabla u)\|_{Lp_1'}\|\partial_i\varphi\|_{L_{p_1}}.$$

Учитывая (5), (6) имеем $|a_i(\nabla u)|^{p_1'}\le C(1+|\nabla u|)^{(p_1-1)p_1'}=C(1+(|\nabla u|))^{p_1}$. Таким образом, $\|\partial_i a_i(\nabla u)\|_{V_1^*}\le C_1\left(1+\|u\|_{V_1}\right)^{p_1}$ и отображение A_1 ограничено из V_1 в V_1^*. Докажем теперь неравенство (11). Если $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, то

$$\langle A_1u,\varphi\rangle=\int_\Omega\sum_{i=1}^n a_i(\nabla u)\partial_i\varphi dx. \qquad (16)$$

Если $\varphi_j\to u$ в V_1, то $\partial_i\varphi\to\partial_i u$ в $L_{p_1}(\Omega)$. Так как предельный переход возможен в обеих частях (16), то (16) справедливо при $\varphi=u$. Воспользовавшись условием (6), получаем (11), и п.1 предложения доказан.

Аналогично, по проще, доказывается п.2.

Докажем п.3. Согласно (16),

$$\langle A_1u-A_1v,\varphi\rangle=\int_\Omega\sum_{i=1}^n(a_i(\nabla u)-a_i(\nabla v))\partial_i\varphi\Delta x. \qquad (17)$$

Справедливо тождество

$$a_2(\xi_2)-a_1(\xi_1)=\int_0^1\frac{d}{dt}a_2(\xi_1+t(\xi_2-\xi_1))dt=\int_0^1\sum_{j=1}^n\frac{\partial a_1(\xi_1+t(\xi_2-\xi_1))}{\partial\xi_j}(\xi_{2j}-\xi_{1j})dt. \qquad (18)$$

Если u и $v\in C_0^\infty$, то положив $\varphi=u-v$ и воспользовавшись для оценки снизу правой части (17), формулой (18) и условием (5) получаем (13) для гладких u и v. Переходя к пределу, выводим (13) для всех $u,v\in V_1$, и п.3 доказан.

Пункт 4 доказывается аналогично.

Теорема. При сформулированных выше условиях на операторы A_1, A_0, A_2 и на функцию $g(x)$ задача (1) имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее классу $U=L_\infty(H)\cap L_{p_1}(V_1)\cap L_{p_0}(V_0)$ (как обычно, $L_p(E)=L_p([0,\tau],E)$) и удовлетворяющий начальному условию

$$u|_{t=0}=u_0,\ u_0\in H. \qquad (19)$$

Производная $\partial_t u$ решения $u\in U$ уравнения (1) представляется в виде

$$\partial_t u=\eta_1+\eta_2+\eta_3+g, \qquad (20)$$

где

$$\eta_1\in L_{p_1'}(V_1^*),\ \eta_2\in L_{p_0'}(V_0^*),\ \eta_3\in L_2(H^{-1})\subset L_{p_1'}(V_1^*), \qquad (21)$$

$p_1\ge 2$, $g\in L_q(\Omega)$, g тоже, что в (1).

Решение задачи (1), (19) принадлежащее U единственно.

Доказательство. Если $u\in U$,то формула (20) очевидна; $\eta_1=-A_1u$, $\eta_2=-A_0u$ и $\eta_3=-A_2u$. Включения (21) следуют из свойств ограниченности операторов A_1, A_0 и A_2 и из (4). Доказательство существования в теореме 1 состоит из нескольких этапов.

На первом этапе задаче (1), (19) сопоставляется конечномерная система Галеркина, аппроксимирующая задачу (1), (19). На втором этапе выводятся априорные оценки решений $u_N(t,x)$ этих систем, равномерные по N.

На третьем этапе из $\{u_N\}$ выбирается подпоследовательность, сходящаяся в определенном слабом смысле к некоторой функции $u \in U$. Наконец на четвертом этапе доказывается, что и является решением (1), (19).

ЛИТЕРАТУРА.

[1] Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы квазилинейных параболических уравнений. ДАН СССР. Т.254, №4,1982. с. 780-784.

[2] Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.

[3] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.